

EGY NEGYEDRENDŰ REKURZÍV SOROZATCSALÁDRÓL

Pethő Attila (Debrecen, Hungary)

Emlékül Kiss Péternek, a rekurzív sorozatok fáradhatatlan kutatójának.

Abstract. Let $a, b \in \mathbf{Z}$ and $\delta \in \{1, -1\}$ such that $a^2 - 4(b - 2\delta) \neq 0$, $b\delta \neq 2$ and if $\delta = 1$, then $b \neq 2a - 2$. We define the fourth order recursive sequence $G_n = G_n(a, b, \delta)$, $n \geq 0$ by the initial terms $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, $G_2 = a$, $G_3 = a^2 - b - \delta$ and by the recursion

$$G_{n+4} = aG_{n+3} - bG_{n+2} + \delta aG_{n+1} - G_n, \quad n \geq 0.$$

Similarly, the sequence $\widehat{G}_n = \widehat{G}_n(a, b, \delta)$, $n \geq 0$ is defined by the same recursive relation but with initial terms $\widehat{G}_0 = 4$, $\widehat{G}_1 = a$, $\widehat{G}_2 = a^2 - 2b$, $\widehat{G}_3 = a^3 - 3ab + 3a\delta$. It is shown that G_n behaves in some sense similarly as the Fibonacci sequence and $\widehat{G}_n$ as the Lucas sequence. More precisely we prove that G_n is a divisibility sequence and $\widehat{G}_n$ divides $\widehat{G}_m$ whenever n is odd and divides m . We prove further that these sequences are closely related to the second order sequences defined by the initial terms $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, as well as $\widehat{g}_0 = 2$, $\widehat{g}_1 = a$ and by the recursion

$$g_{n+2} = ag_{n+1} - (b - 2\delta)g_n, \quad n \geq 0.$$

We show for example that if p is a prime then

$$G_p(a, b, \delta) \equiv g_p(a, b, \delta) \pmod{p} \quad \text{and} \quad \widehat{G}_p(a, b, \delta) \equiv \widehat{g}_p(a, b, \delta) \pmod{p}.$$

1. Bevezetés

Legyenek $a, b \in \mathbf{Z}$ és $\delta \in \{1, -1\}$ olyanok, hogy $a^2 - 4(b - 2\delta) \neq 0$, $b\delta \neq 2$, és ha $\delta = 1$, akkor $b \neq 2a - 2$. Legyen továbbá a $G_n = G_n(a, b, \delta)$, $n \geq 0$ sorozat a $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, $G_2 = a$, $G_3 = a^2 - b - \delta$ kezdőértékkel és a

$$(1) \quad G_{n+4} = aG_{n+3} - bG_{n+2} + \delta aG_{n+1} - G_n, \quad n \geq 0$$

rekurzióval definiálva.

Hasonlóképpen legyen a $\widehat{G}_n = \widehat{G}_n(a, b, \delta)$, $n \geq 0$ sorozat a $\widehat{G}_0 = 4$, $\widehat{G}_1 = a$, $\widehat{G}_2 = a^2 - 2b$, $\widehat{G}_3 = a^3 - 3ab + 3a\delta$ kezdőtagokkal és ugyancsak az (1) rekurzióval definiálva.

Dolgozatunkban megmutatjuk, hogy a $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ sorozat bizonyos szempontból hasonlóképpen viselkedik, mint a Fibonacci, míg a $\hat{G}_n$, mint a Lucas-sorozat. Pontosabban igaz az

1. Tétel. A $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ oszthatósági sorozat, azaz ha $d|n$, akkor $G_d|G_n$.

2. Tétel. Ha n páratlan és $d|n$, akkor $\hat{G}_d|\hat{G}_n$.

Az 1. Tételt a $b = 1, 3$, $\delta = 1$ speciális esetekben a [2] dolgozatban bizonyítottuk.

A fenti negyedfokú sorozatok szoros kapcsolatban állnak a $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, illetve a $\hat{g}_0 = 2$, $\hat{g}_1 = a$ kezdőértékekkel és a

$$(2) \quad g_{n+2} = ag_{n+1} - (b - 2\delta)g_n, \quad n \geq 0$$

rekurzióval definiált másodrendű rekurzív sorozatokkal. A pontos összefüggéseket a 4. Tételben fogalmazzuk meg.

Végezetül megmutatjuk, hogy a $\{G_n\}$ és $\{g_n\}$, illetve a $\{\hat{G}_n\}$ és $\{\hat{g}_n\}$ sorozatok p prímszám szerinti redukáltjai is összefüggnek.

3. Tétel. Legyen p prímszám. Akkor

$$(3) \quad G_p(a, b, \delta) \equiv g_p(a, b, \delta) \pmod{p} \quad \text{és}$$

$$(4) \quad \hat{G}_p(a, b, \delta) \equiv \hat{g}_p(a, b, \delta) \pmod{p}.$$

Az 5. tételben megfogalmazott kongurenciák prímszámok tesztelésére is alkalmasak, erre a kérdésre azonban most nem térünk ki.

2. Kapcsolat a $\{G_n\}$ és $\{g_n\}$ sorozatok karakterisztikus polinomjai között

A $\{G_n\}$ és persze a $\{\hat{G}_n\}$ karakterisztikus polinomja

$$P_G(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - \delta ax + 1.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{x^2}P_G(x) = \left(x + \frac{\delta}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{\delta}{x}\right) + b - 2\delta,$$

azaz az $\frac{1}{x^2}P_G(x)$ racionális törtfüggvényben az $y = x + \frac{\delta}{x}$ helyettesítést végrehajtva a

$$P_g(y) = y^2 - ay + b - 2\delta$$

polinomot kapjuk, amelyik a $\{g_n\}$ és $\{\widehat{g}_n\}$ sorozatok karakterisztikus polinomja. Az $a^2 - 4(b - 2\delta) \neq 0$ feltétel miatt $P_g(y)$ -nak két különböző gyöke van, melyeket ε és ε' -vel fogunk jelölni. A $b\delta \neq 2$ feltétel miatt $b - 2\delta \neq 0$, így $\varepsilon\varepsilon' \neq 0$.

A kezdőértékek megválasztása miatt

$$(5) \quad g_n = \frac{\varepsilon^n - \varepsilon'^n}{\varepsilon - \varepsilon'} \quad \text{és} \quad \widehat{g}_n = \varepsilon^n + \varepsilon'^n$$

teljesül minden $n \geq 0$ -ra.

Ha η a $P_G(x)$ gyöke, akkor $\eta \neq 0$ és $\frac{\delta}{\eta}$ is gyöke $P_G(x)$ -nek. A $b \neq 2a - 2$, ha $\delta = 1$ feltétel miatt $\eta \neq \frac{\delta}{\eta}$. A $P_G(x)$ és $P_g(y)$ polinomok közötti összefüggés miatt $\eta + \frac{\delta}{\eta}$ gyöke $P_g(y)$ -nak. Feltehető, hogy $\eta + \frac{\delta}{\eta} = \varepsilon$. Mivel $\varepsilon \neq \varepsilon'$, így $P_G(x)$ -nek van olyan ϑ -val jelölt gyöke, amelyre $\vartheta + \frac{\delta}{\vartheta} = \varepsilon'$. Eredményeinket az alábbi állításokban foglaljuk össze.

1. Lemma. *Legyenek $a, b, \in \mathbf{Z}$ és $\delta \in \{1, -1\}$ olyanok, hogy $a^2 - 4(b - 2\delta) \neq 0$, $b\delta \neq 2$, és $b \neq 2a - 2$, ha $\delta = 1$. Ekkor*

- (i) $P_g(x)$ -nek két nullától különböző gyöke van: ε és ε' .
- (ii) $P_G(x)$ -nek négy különböző gyöke van: η , $\frac{\delta}{\eta}$, ϑ és $\frac{\delta}{\vartheta}$.
- (iii) Teljesül, hogy

$$\varepsilon = \eta + \frac{\delta}{\eta} \quad \text{és} \quad \varepsilon' = \vartheta + \frac{\delta}{\vartheta}.$$

Az 1. Lemmában megfogalmazott tulajdonságokat, valamint a $\{G_n\}$ és a $\{\widehat{G}_n\}$ sorozatok kezdőértékeit felhasználva könnyen belátható, hogy

$$(6) \quad G_n = \frac{\eta^n + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^n - \vartheta^n - \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^n}{\eta + \frac{\delta}{\eta} - \vartheta - \frac{\delta}{\vartheta}}$$

és

$$(7) \quad \widehat{G}_n = \eta^n + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^n + \vartheta^n + \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^n$$

teljesül minden $n \geq 0$ -ra.

3. A tételek bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Vegyük észre először az

$$\eta^n + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^n - \vartheta^n - \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^n = (\eta^n - \vartheta^n) \left(1 - \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^n\right)$$

relációt, amelyik minden $n \geq 0$ -ra teljesül. Ebből és (6)-ból következik, hogy

$$(8) \quad G_n = \frac{\eta^n - \vartheta^n}{\eta - \vartheta} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^n}{1 - \frac{\delta}{\eta\vartheta}}.$$

Az η és ϑ a $P_G(x)$ gyökei, így egységek valamely algebrai számtestben. Ebből következik, hogy $\frac{\delta}{\eta\vartheta}$ is egység.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $G_n \in \mathbf{Z}$ minden $n \geq 0$ -ra. Legyen $d \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $d \mid n$. Akkor $G_n/G_d \in \mathbf{Q}$.

Másrészt (8)-ból következik, hogy

$$\frac{G_n}{G_d} = \frac{\eta^n - \vartheta^n}{\eta^d - \vartheta^d} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^n}{1 - \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^d}.$$

Elemi algebrai azonosság szerint

$$\frac{\eta^n - \vartheta^n}{\eta^d - \vartheta^d} = \eta^{n-d} + \eta^{n-2d}\vartheta^d + \dots + \eta^d\vartheta^{n-2d} + \vartheta^{n-d}.$$

A jobb oldali összeadandók mindegyike algebrai egész, így az összegük is az. Ugyanígy látható be, hogy a második faktor is algebrai egész, így G_n/G_d olyan algebrai egész szám, amelyik $\mathbf{Q}$ -ban van. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha $G_n/G_d \in \mathbf{Z}$.

2. tétel bizonyítása. Ez hasonló az 1. Tétel bizonyításához. Azt kell csak észrevennünk, hogy

$$(9) \quad \eta^n + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^n + \vartheta^n + \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^n = (\eta^n + \vartheta^n) \left(1 + \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^n\right),$$

valamint ha n páratlan és $d \mid n$, akkor

$$\frac{\eta^n + \vartheta^n}{\eta^d + \vartheta^d}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1 + \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^n}{1 + \left(\frac{\delta}{\eta\vartheta}\right)^d}$$

algebrai egészek.

1. Megjegyzés. Az osztható rekurzív sorozatokat Bézivin, Pethő és van der Poorten [1] karakterizálták. Az általunk definiált $\{G_n\}$ és $\{\widehat{G}_n\}$ sorozatoknak az az érdekessége, hogy bár (8), illetve (9) szerint felbomlanak két másodrendű lineáris

rekurzív sorozat szorzatára, a faktorok azonban általában nem racionális egészek. Ez történik például, ha $b = -1$ vagy -3 és $\delta = -1$.

Az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ kezdőértékekkel, illetve rekurzióval definiált Fibonacci-sorozat jelenti az iskolapéldát osztható rekurzív sorozatokra. Erre könnyű olyan bizonyítást adni (ld. pl. [3]), amelyek csak az egész számok aritmetikáját használja. Hasonló bizonyítást a $\{G_n\}$ és a $\{\widehat{G}_n\}$ sorozatokra nem sikerült találnunk.

2. Megjegyzés. A Fibonacci-sorozatokra, sőt az általánosabb $R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ sorozatokra, ahol α és β az $\alpha x^2 - r_1 x - r_0$, $r_1, r_0 \in \mathbf{Z}$ polinom gyökei, az 1. tételnél erősebb $(R_n, R_d) = R_{(n,d)}$ reláció is teljesül.

Ez általában nem igaz az általunk definiált $\{G_n\}$ sorozatokra. Tekintsük például az

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_n	0	1	1	5	7	20	35	83	161	355	720

sorozatot, amelyek a

$$G_{n+4} = G_{n+3} + 3G_{n+2} - G_{n+1} - G_n$$

rekurziónak tesz eleget. Ekkor például $(G_3, G_5) = 5 \neq G_1$ és $(G_4, G_6) = 7 \neq G_2$. Könnyen lehet persze további példákat is találni, ezért érdekes kérdés a $\{G_n\}$ és $\{\widehat{G}_n\}$ sorozatokra a tagok legnagyobb közös osztójának jellemzése.

A 3. tétel bizonyítása. A (8), (9) valamint az 1. lemma (iii) relációkat használjuk a bizonyításban. Legyen p prímszám. Ha $p = 2$, akkor (3) és (4) a sorozatok kezdőértékei megválasztása miatt teljesül. A továbbiakban tehát feltehető, hogy p páratlan. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon^p - \varepsilon'^p}{\varepsilon - \varepsilon'} &= \frac{\left(\eta + \frac{\delta}{\eta}\right)^p - \left(\vartheta + \frac{\delta}{\vartheta}\right)^p}{\varepsilon - \varepsilon'} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \delta^i \left(\eta^{p-2i} + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{p-2i} - \vartheta^{p-2i} - \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{p-2i}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'} \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \delta^i \frac{\eta^{p-2i} + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{p-2i} - \vartheta^{p-2i} - \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{p-2i}}{\eta + \frac{\delta}{\eta} - \vartheta - \frac{\delta}{\vartheta}} \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \delta^i G_{p-2i}.
 \end{aligned}$$

Mivel $\binom{p}{i}$ minden $1 \leq i \leq p-i$ -re osztható p -vel, így az előző azonosságból

$$g_p \equiv G_p \pmod{p},$$

azaz (3) következik.

A (4) kongruencia hasonlóképpen ellenőrizhető.

3. Megjegyzés. A (3) és (4) kongruenciák nem prímkritériumok, azaz vannak olyan összetett számok, amelyekre (3), illetve (4) teljesül. A Fibonacci-sorozat és a 2. megjegyzésben megadott sorozat például az $(a, b, \delta) = (1, -3, -1)$ paraméterekkel van definiálva. A $0 \leq n \leq 10000$ intervallumban az $n = 15, 25, 45, 121, 125, 375, 525, 625, 1125, 1605, 2205, 2375, 3125, 4375, 5425, 8925, 9375$ összetett számokra is teljesül (3).

4. További összefüggések a $\{G_n\}$ és $\{g_n\}$, illetve a $\{\widehat{G}_n\}$ és $\{\widehat{g}_n\}$ sorozatok között

Az előbbieken láthattuk, hogy a $\{G_n\}$ és $\{g_n\}$, illetve $\{\widehat{G}_n\}$ és $\{\widehat{g}_n\}$ sorozatok között szoros kapcsolat van. A 3. részben például beláttuk, hogy páratlan p egészre g_p kifejezhető $G_p, G_{p-2}, \dots, G_1$ egész együtthatós lineáris kombinációjaként. Most az ellenkező irányú kapcsolatot vizsgáljuk, azaz G_p -t $(\widehat{G}_p - t)$ szeretnénk kifejezni a $\{g_n\}$ ($\{\widehat{g}_n\}$) sorozat elemei lineáris kombinációjaként. A következő állítás biztosan ismert, de nem sikerült referenciát találnunk.

2. Lemma. *Definiáljuk a $\{\lambda_i^{(j)}\}_{i \geq 0, j \geq 2}$ sorozatot a következőképpen:*

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(0)} &= 2, \lambda_1^{(0)} = 0, \lambda_0^{(1)} = 1, \lambda_1^{(1)} = 0 \quad \text{és} \\ \lambda_0^{(2k+2)} &= -\lambda_0^{(2k)}, \lambda_{k+1}^{(2k+2)} = \lambda_k^{(2k+1)}, \lambda_i^{(2k+2)} = \lambda_{i-1}^{(2k+1)} - \lambda_i^{(2k)}, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{és} \\ \lambda_0^{(2k+3)} &= 0, \lambda_{k+1}^{(2k+3)} = \lambda_{k+1}^{(2k+2)}, \lambda_i^{(2k+3)} = \lambda_i^{(2k+2)} - \lambda_i^{(2k+1)}, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Ha $0 \leq n = 2k + e$, ahol $e \in \{0, 1\}$, akkor

$$X^n + Y^n = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} (X + Y)^{2i+e} (XY)^{k-i}.$$

Bizonyítás. Egyszerű teljes indukció, felhasználva az

$$X^{n+1} + Y^{n+1} = (X^n + Y^n)(X + Y) - XY(X^{n-1} + Y^{n-1})$$

azonosságot.

3. Lemma. Bármely $n \geq 0$ és $0 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$ -re $\lambda_i^{(n)}(-1)^{[\frac{n}{2}]-i} \geq 0$.

Bizonyítás. A 2. lemmában leírtak miatt

$$\lambda_{[n/2]}^{(n)} = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_0^{(n)} = \begin{cases} 2(-1)^{[n/2]}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Így az állítás igaz minden n -re és $i = 0, [\frac{n}{2}]$ -re. Tegyük fel, hogy igaz minden $m < n$ -re, és legyen $0 < i < [\frac{n}{2}]$.

Ha n páros, mondjuk $n = 2k + 2$, és $0 < i < k + 1$, akkor

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(2k+2)}(-1)^{k+1-i} &= \lambda_{i-1}^{(2k+1)}(-1)^{k+1-i} - \lambda_i^{(2k)}(-1)^{k+1-i} \\ &= \lambda_{i-1}^{(2k+1)}(-1)^{[\frac{2k+1}{2}]-(i-1)+2} + \lambda_i^{(2k)}(-1)^{k-i+2}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló kifejezésben az indukciós hipotézis szerint mindkét összeadandó nem negatív, így az összegük is az.

Ha pedig n páratlan, például $n = 2k + 3$, és $0 < i < k + 1$, akkor

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(2k+3)}(-1)^{k+1-i} &= \lambda_i^{(2k+2)}(-1)^{k+1-i} - \lambda_i^{(2k+1)}(-1)^{k+1-i} \\ &= \lambda_i^{(2k+2)}(-1)^{[\frac{2k+2}{2}]-i} + \lambda_i^{(2k+1)}(-1)^{[\frac{2k+1}{2}]-i+2}, \end{aligned}$$

és az előbbi esethez hasonlóan következtethetünk arra, hogy a kifejezés nem negatív.

4. Tétel. Legyenek a, b, δ a Bevezetésben megfogalmazott feltételeknek eleget tevő egész számok és $0 \leq n = 2k + e$, ahol $e \in \{0, 1\}$. Akkor

$$G_n(a, b, \delta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} g_{2i+e}(a, b, \delta), & \text{ha } \delta = 1, \\ \sum_{i=0}^k |\lambda_i^{(n)}| g_{2i+e}(a, b, \delta), & \text{ha } \delta = -1, \end{cases}$$

és

$$\widehat{G}_n(a, b, \delta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} \widehat{g}_{2i+e}(a, b, \delta), & \text{ha } \delta = 1, \\ \sum_{i=0}^k |\lambda_i^{(n)}| \widehat{g}_{2i+e}(a, b, \delta), & \text{ha } \delta = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk, mert a második bizonyítása teljesen hasonló. Az a, b és δ argumentumokat elhagyjuk a továbbiakban. A (6) azonosságot és a 2. lemma állítását felhasználva

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{\eta^n + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^n - \left(\vartheta^n + \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^n\right)}{\varepsilon - \varepsilon'} \\
&= \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'} \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} \left(\eta + \frac{\delta}{\eta}\right)^{2i+e} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{k-i} - \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} \left(\vartheta + \frac{\delta}{\vartheta}\right)^{2i+e} \left(\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'} \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} \delta^{k-i} (\varepsilon^{2i+e} - \varepsilon'^{2i+e}) \\
&= \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n)} \delta^{k-i} g_{2i+e}.
\end{aligned}$$

Végül felhasználva a 3. lemmát, kapjuk az állítást.

Irodalom

- [1] J.-P. BÉZIVIN, A. PETHŐ and A. J. VAN DER POORTEN, A full characterization of divisibility sequences, *Amer. J. Math.*, **112** (1990), 985–1001.
- [2] A. PETHŐ, Complete solutions to a family of quartic diophantine equations, *Math. Comp.*, **57** (1991), 777–798.
- [3] N. N. VOROBJEV, *Fibonacci Numbers* (in Russian, sixth edition), Nauka Moskau, 1978.

Pethő Attila

Debreceni Egyetem

Számítógéptudományi Tanszék

H-4010 Debrecen, Pf. 12

e-mail: pethoe@math.klte.hu