Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae, 24. (1997) pp. 67–73

# Független metszőrendszerek II.

RÓKA SÁNDOR

**Abstract.** (Independent intersection systems) Definition 1 gives the meaning of independent intersection systems, which is similar of the meaning of separating systems (theorem 5), which is discussed by others (see for e.g. [2–8]).

If the number of the elements of the intersection systems on the $n$-element set is $m$, then $c_1 \log_2 n \leq m \leq c_2 n^2$. There bounds can not be sharpened. Theorems 3 and 4 are related to uniform systems.

**1. Definíció.** $A_1, A_2, \ldots, A_m$ az $n$-elemű $H$ halmaz részhalmazai *független metszőrendszert* alkotnak, ha

(1) $\forall x \in H$ előáll $A_i$ metszeteként;

(2) Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rendszerből bármely $A_i$-t elhagyva (1) nem teljesül.

**1. Tétel.** *$A_1, A_2, \ldots, A_m$ pontosan akkor független metszőrendszer, ha $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_m}$ is független metszőrendszer.*

**Bizonyítás.** Legyen $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $X_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_m$ független metszőrendszer. Megmutatjuk, hogy például $X_1$ előállítható az $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_m}$ halmazokból néhánynak a metszeteként.

$$X_1 = H \setminus \{X_2 \cup X_3 \cdots \cup X_n\} = \overline{X_2 \cup X_3 \cup \cdots \cup X_n} =$$
$$= \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \cdots \cap \overline{X_n} = \overline{\left(\bigcap_{i \in I_2} A_i\right)} \cap \overline{\left(\bigcap_{i \in I_3} A_i\right)} \cap \cdots \cap \overline{\left(\bigcap_{i \in I_n} A_i\right)} =$$
$$= \left(\bigcup_{i \in I_2} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I_3} \overline{A_i}\right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{i \in I_n} \overline{A_i}\right) = \cup(\overline{A_{i_2}} \cap \overline{A_{i_3}} \cap \cdots \cap \overline{A_{i_n}})$$

Mivel $X_1$ egyetlen elemből álló halmazt jelentett, így az unió tagjainak valamelyike egyenlő $X_1$-gyel.

Látható, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ és az $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots \overline{A_m}$ rendszerek egyszerre rendelkeznek az (1) tulajdonsággal, és ebből adódóan a (2) tulajdonsággal is. ∎

**Következmény.** *Az $A_1, A_2, \dots, A_m$ független metszőrendszeren nem oldható meg az*

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \quad I \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \quad |I| \neq 1 \tag{3}$$

*egyenlet.*

**Bizonyítás.** A definícióból következik, hogy $A_I = \bigcup_{i \in I} A_i$, továbbá $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ és az $|I| \neq 1$ egyenlet nem oldható meg, s így az előbbi tétel miatt nem oldható meg a (3) egyenlet sem. ∎

**2. Tétel.** *Az $A_1, A_2, \dots, A_m$ az $n$-elemű $H$ halmazon független metszőrendszer, akkor $c_1 \log_2 n \leq m \leq c_2 n^2$, és ezek a korlátok nagyságrendjükben pontosak.*

**Bizonyítás.** Legyen $X_k = \bigcup_{i \in I_k} A_i$, $|X_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Az $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ rendszer *Sperner-rendszer*, így a *Sperner-lemma* [1] miatt $n \leq \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$, azaz $m \geq c_1 \log_2 n$. Megmutatjuk, hogy az alsó korlát pontos, vagyis, ha $\binom{m}{[\frac{m}{2}]} \leq n$, akkor van egy legfeljebb $m$ halmazból álló $A_1, A_2, \dots, A_m$ független metszőrendszer az $n$ elemű $H$ halmazon.

Tekintsük azt az $A$ $m \times \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$-es 0-1 mátrixot, amelynek oszlopai az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz egy-egy $\left[\frac{m}{2}\right]$-elemű részét reprezentálják. Az $A$ mátrix soraival megadott $m$ db halmazból néhányat választva az $\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ elemű halmaz bármely elemét kimetszhetjük.

A felső korlát igazolása. Legyen $x \in H$, s tekintsük azon $A_i$-ket, melyek szükségesek az (1) és (2) szerinti előállításhoz. $A_i$-kből hagyjuk el az $x$ elemet. Az így kapott halmazokat jelölje $A_i'$. Ezen $A_i'$-k száma $s$. Most bármely $s-1$ db $A_i'$ metszete $\neq \emptyset$, míg az összes $A_i'$ metszete $= \emptyset$. Így minden $A_i'$-hez hozzárendelhetünk egy olyan elemet a $H \setminus \{x\}$ halmazból, mely a többi $A_j'$-nek nem eleme. Ezért $s \leq n-1$. Így leszámolva az $A_1, A_2, \dots, A_m$ halmazokat, azt kapjuk, hogy $m \leq n(n-1)$.

Megadunk olyan független metszőrendszert a $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazon, mely $c_2 n^2$ halmazból áll. Legyen $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, $R = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, $A_i = R \setminus \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$; $A_{i,j} = \{x_i\} \cup A_j$, $i = r+1, r+2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, r$.

Az $A_{i,j}$ halmazok független metszőrendszert alkotnak, s a halmazok száma több, mint $\frac{1}{4}n^2 - 1$. ∎

Vizsgáljuk most azon független metszőrendszereket, melyek uniform rendszerek.

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ az $n$-elemű $H$ halmazon független metszőrendszer, és $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Jelölje $m$ értékének legkisebb értékét $f_k(n)$, legnagyobb értékét $F_k(n)$.

Az 1. Tétel miatt $f_k(n) = f_{n-k}(n)$ és $F_k(n) = F_{n-k}(n)$. Ezért $f_k(n)$ értékét elegendő $1 \le k \le \frac{n}{2}$ esetekben meghatározni.

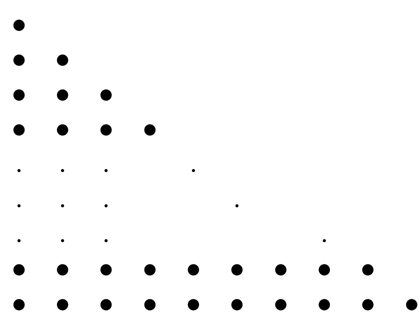
**3. Tétel.**
(a) $f_k(n) \le \frac{2n}{k}$, $1 \le k \le \frac{n}{2}$.
(b) *Ha* $k \le \sqrt{2n}$, $k \mid 2n$ *és* $k$ *páros, akkor* $f_k(n) = \frac{2n}{k}$.
(c) $f_k\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) = k + 1$, *azaz ha* $n = \frac{k(k+1)}{2}$, *akkor* $f_k(n) = \frac{2n}{k}$.

**Bizonyítás.** Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazon független metszőrendszer, $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \ldots, m$, és $B_i = \{k : x_i \in A_k\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $|B_i| \le 2$.

Mivel $mk = \sum\limits_{i=1}^{m} |A_i| = \sum\limits_{j=1}^{n} |B_j| \le 2n$, így $m \le \frac{2n}{k}$.

Belátjuk, ha $k \le \sqrt{2n}$, $k \mid 2n$ és $k$ páros, akkor $f_k(n) \le \frac{2n}{k}$. Innen (a) felhasználásával adódik a (b) állítás.

Készítsünk egy gráfot. Legyen a $G$ gráf csúcsainak száma $m = \frac{2n}{k}$, és számozzuk meg a gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, m$ számokkal. A gráf minden csúcsára $k$ él illeszkedjen. Ekkor a gráfnak $n$ éle van. Ilyen gráf az *Erdős—Gallai-tétel* [9] szerint készíthető. Álljon most az $n$ elemű $H$ halmaz a gráf éleiből, az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazokat pedig a következő módon kapjuk: $A_i$ a gráf azon éleiből áll, amelyek illeszkednek a gráf $i$-edik csúcsára.



Legyen most $n = \binom{k+1}{2}$. A $H$ halmaz az ábrán látható pontokból áll, az $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ halmazokat pedig a háromszög átlóján levő pontok határozzák meg, egy-egy ilyen ponttal közös halmazba tartoznak a vele egy sorban és a vele egy oszlopban levő pontok, valamint egy további halmaz van még, mely az átlón levő pontokból áll. Ezen konstrukció miatt $f_k(n) \le k + 1$, ám (a) miatt $f_k(n) \ge k + 1$, ezzel igazoltuk (c)-t is. ∎

**4. Tétel.** $k(n-k) \leq F_k(n) \leq kn$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

**Bizonyítás.** Legyen

$$H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ R = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},\ A_i = R \setminus \{x_i\},\ i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$A_{i,j} = \{x_i\} \cup A_j,\ i = k+1, k+2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Az $A_{i,j}$ halmazok független metszőrendszert alkotnak, a halmazok száma $k(n-k)$, és $|A_{i,j}| = k$ így valóban $F_k(n) \geq k(n-k)$.

A felső korlát igazolása. Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ az $n$-elemű $H$ halmazon független metszőrendszer, $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Legyen $x \in H$, s tekintsük azon $A_i$-ket, melyek szükségesek az (1) és (2) szerinti előállításához. $A_i$-kből hagyjuk el az $x$ elemet. Az így kapott halmazokat jelölje $A_i'$. Ezen $A_i'$-k száma $s$. Most bármely $s-1$ db $A_i'$ metszete $\neq \emptyset$, míg az összes $A_i'$ metszete $= \emptyset$. Így minden $A_i'$-hez megadható olyan elem, mely neki nem eleme, de a többi $A_j'$-nek igen. Rögzített $A_j'$ mellet sorra véve a többi $A_i'$-t, $A_j'$-nek $s-1$ különböző eleme jelölhető így ki, azaz $s-1 \leq \left|A_j'\right| = k-1$. Tehát $H$ egy tetszőlegesen kiválasztott $x$ eleméhez legfeljebb $k$ db $A_i'$ rendelhető, így $m \leq nk$. ∎

Már eddig is több független metszőrendszerre láttunk példát, most még további két rendszert konstruálunk.

**1. konstrukció.** Tekintsük egy $N$ pontú teljes gráfot, s minden élére helyezzünk újabb pontot. A $H$ halmaz ezen „régi” és „új” pontokból áll, tehát $|H| = N + \binom{N}{2}$. A metszőrendszer a „fél-élekből” áll, tehát olyan kételemű halmazokból, melyek egyik eleme egy „régi” és egy „új” pont, és közös az az él a teljes gráfban, melyre ez a két pont illeszkedik. A metszőrendszer elemeinek $m$ száma itt nagyságában $2\,|H|$-hoz közelít.

**2. konstrukció.** Vegyünk egy $N$ elemű $X$ halmazt, ennek elemeit nevezzük „régi” pontoknak, az „új” pontok az $N$ elemű halmaz $\left[\frac{N}{2}\right]$-elemű részei. Így elkészítettük a $H$ halmazt, mely ezen „régi” és „új” pontokból áll, tehát $|H| = N + \binom{m}{\left[\frac{m}{2}\right]}$. A metszőrendszer egy-egy halmaza egy „új” pontból és a hozzá tartozó $\left[\frac{N}{2}\right]$ „régi” pontból $\left[\frac{N}{2}\right] - 1$ választva — ezt az összes lehetséges módon megtesszük — áll. Itt $m = \left[\frac{N}{2}\right]\binom{N}{\left[\frac{N}{2}\right]}$, vagyis $m$ nagyságában $|H| \log |H|$-hoz közelít.

A dolgozatban megadott független metszőrendszerek mindegyike *Sperner-rendszer* volt. Ez azonban nem szükségszerű, mint az alábbi példa mutatja.

A következő konstrukció mutatja, hogy egy független metszőrendszer nem feltétlenül *Sperner-rendszer*. (A táblázat sorai jelölik ki egy 6-elemű halmaz részhalmazait.)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| • | • | | | | |
| • | • | • | | | |
| | • | • | • | | |
| | | • | • | • | |
| • | | | • | | |
| | | | | • | • |
| • | | | | | • |

Az pedig nyilvánvaló, hogy egy *Sperner-rendszer* többnyire nem lesz független metszőrendszer, még akkor sem, ha telített (egy *Sperner-rendszert* akkor nevezünk telítettnek, ha a rendszer nem bővíthető további halmazzal úgy, hogy a *Sperner*-tulajdonsága megmaradjon). Erre mutat példát a második ábra.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • | • | • | • | |
| • | • | | • | • |
| | | • | | • |

Várhatnánk, hogy ha $S$ és $S^\star$ is *Sperner-rendszer*, akkor $S$ független metszőrendszer. ($A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_i \subseteq H$, ahol $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ekkor $A^\star = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, ahol $B_i = \{k : x_i \in A_k\}$. Látható, hogy $(A^\star)^\star = A$.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| • | • | | |
| | • | • | |
| | | • | • |
| • | | | • |
| • | • | • | |

**2. Definíció.** $A_1, A_2, \ldots, A_m$ az $n$-elemű $H$ halmaz részhalmazai *független $t$-metszőrendszer* alkotnak, ha

(1') $H$ bármely $t$-elemű része előáll néhány $A_i$ metszeteként;

(2') Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rendszerből bármely $A_i$-t elhagyva (1') nem teljesül.

A független metszőrendszer fogalma kapcsolódik egy régen ismert fogalomhoz, a *kölcsönösen szeparáló rendszerekéhez.* Legyen $H$ egy $n$ elemű halmaz, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ennek részhalmazai. Ez utóbbi rendszer *szeparáló rendszer*, ha $H$ bármely $x, y$ elemeihez van olyan $A_i$, hogy vagy $x \in A_i$ és $y \notin A_i$, vagy $x \in A_i$ és $y \notin A_i$. Ezt a fogalmat Rényi [2] vezette be, és Katona [3] megmutatta, hogy $m \geq [\log_2 n]$. Dickson a szeparáló rendszer definícióját módosította. Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rendszert *kölcsönösen szeparáló rendszernek* nevezi, ha $H$ bármely $x, y$ elemeihez van olyan $A_i$ és $A_j$, hogy $x \in A_i$ és $y \notin A_i$, továbbá $x \notin A_j$ és $y \in A_j$. Dickson [4], majd Spencer [5] megmutatja, hogy erre a rendszerre is $m \geq \log_2 n$. Katona fogalmazta meg a *teljes szeparáló rendszer* fogalmát. Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ rendszert akkor tekintjük ilyennek, ha $H$ bármely $x, y$ elemeihez van olyan $A_i$ és $A_j$, hogy $x \in A_i$ és $y \in A_j$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$. Erre a rendszerre az előbbiekhez hasonló becslést ad Yao [7] és tőle függetlenül Cai Mao-cheng [8].

Látható, hogy egy teljesen független rendszer egyúttal kölcsönösen szeparáló, és egy kölcsönösen szeparáló pedig szeparáló.

**5. Tétel.** *A független metszőrendszer (1) feltétele azonos a kölcsönös szeparáló rendszer definíciójával.*

**Bizonyítás.** Ha egy halmazrendszerre teljesül az (1) feltétel, akkor az kölcsönösen szeparáló. Ugyanis vegyük $H$ két $x, y$ elemét. Ekkor $x$ is $y$ is előáll néhány $A_i$ metszeteként. Ezért van olyan $A_i$ melynek $x$ eleme, de $y$ nem, és van olyan $A_j$ melynek $y$ eleme, de $x$ nem. Ha egy halmazrendszer kölcsönösen szeparáló, akkor kielégíti az (1) feltételt, hiszen már az a kikötés, hogy $H$ bármely $x, y$ eleméhez van olyan $A_i$, hogy $x \in A_i$ és $y \notin A_j$, garantálja azt, hogy $x$ előállítható néhány $A_i$ metszeteként. ∎

Ezt a tételt figyelembe véve nevezzük az $n$-elemű $H$ halmaz $A_1, A_2, \ldots,$ $A_m$ részhalmazait *t-szeparálónak*, ha kielégíti az (1') feltételt.

Látható, hogy egy $t$-szeparáló rendszer egyúttal $t'$-szeparáló is, ahol $t > t' \geq 1$.

Az is könnyen ellenőrizhető, ha a $H$ halmaznak $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 1-szeparáló rendszere, akkor az $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, $i \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $|I| = t$ halmazokból álló rendszer $t$-szeparáló.

Ha az $n$ elemű $H$ halmazon $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $t$-szeparáló rendszert alkot, akkor $\binom{m}{[\frac{m}{2}]} \geq \binom{n}{t}$. Ez ugyanúgy bizonyítható, mint ahogy a hasonló állítást igazoltuk a 2. Tétel esetén.

Hálával tartozom Katona Gyulának a tőle kapott segítségért és biztatásáért, melyet ezúton szeretnék megköszönni.

## Irodalom

[1] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928), 544–548.

[2] A. Rényi, On Random Generating Elements of a Finite Boolean Algebra, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **22** (1961), 75–81.

[3] G. Katona, On Separating Systems of a Finite Set, *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 174–194.

[4] T. J. Dickson, On a problem concerning Separating Systems of a Fintie Set, *J. Combinatorial Theory* **7** (1966), 191–196.

[5] J. Spencer, Minimal completely Separating Systems, *J. Combiantorial Theory* **8** (1970), 446–447.

[6] G. O. H. Katona, Combinatorial search problem, A Survey of Combiantorial Theory, North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 285–308.

[7] A. C.-C. Yao, On a Problem of Katona on Minimal Separating Systems, *Discrete Math.* **15** (1976), 193–199.

[8] Cai Mao-Cheng, Solutions to Edmonds' and Katona's problems on families of separating subsets, *Discrete Math.* **47** (1983), 13–21.

[9] Erdős—Gallai, Gráfok előírt fokú pontokkal, *Matematikai Lapok* **11** (1960), 264—274.

[10] Róka Sándor, Független metszőrendszerek, *Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* **12** (1990), 17—20.

Az eredmények egy része a [10] dolgozatban megtalálható, itt a teljesség kedvéért ismételtem meg az ott leírtakat. *Az új eredmények:* a 2. Tétel bizonyításában az utolsó konstrukció, a 3—4. Tétel, valamint a független metszőrendszer és a Sperner-rendszerek közti kapcsolat vizsgálata.

Bessenyei College
Dept. of Math.
Nyíregyháza, P. O. Box 166., H-4400,
Hungary